Fonctions polynômes du second et du troisième degré

1. Fonction polynôme du second degré

Rappel : Une fonction **polynôme du premier degré** est une fonction affine : $f(x) = ax + b$.

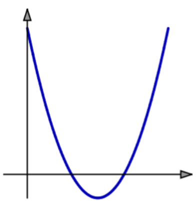
Définition 5.1 Une fonction **polynôme du second degré** est une fonction du type : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Le degré est la plus grande puissance de x qui apparaît dans l'expression de la fonction (ici c'est x^2, donc degré 2).
Le nombre qui multiplie cette plus grande puissance de x s'appelle le **coefficient dominant** (ici le coefficient dominant est a).

Exercice 5.1 Dire si les fonctions suivantes sont des polynômes du second degré, et si oui, donner les valeurs des coefficients a, b et c.

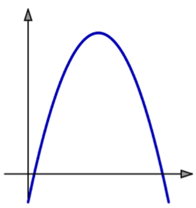
1. $f(x) = -5x^2 + 3x - 2$
2. $g(x) = -3x + 12x^2$
3. $h(x) = (x+3)^2$
4. $k(x) = 8 - 7x$

A. Allure de la courbe

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.
Si a est positif, elle est en "cuvette", si a est négatif, elle est en "colline".



a>0 cuvette



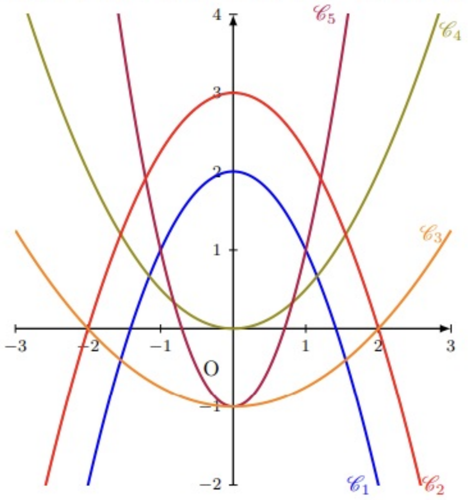
a<0 colline

Exercice 5.2 .

On a représenté, sur le graphique ci-dessous, les fonctions polynômes du second degré suivantes :

$$f(x) = 0,5x^2 \quad ; \quad g(x) = -x^2 + 2 \quad ; \quad h(x) = 0,25x^2 - 1 \quad ; \quad k(x) = -0,75x^2 + 3 \quad ; \quad p(x) = 2x^2 - 1$$

Associez chacune de ces fonctions aux courbes tracées dans le repère ci-dessous.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B. Racines du polynôme

Les racines d'un polynôme sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Pour les trouver, il y a une méthode :

Méthode

1. Calculer le discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
2. Si Δ est négatif, il n'y a pas de solution.
Si Δ est positif, les solutions sont :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
et
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
(Si $\Delta = 0$, ces deux solutions sont égales)

Exercice 5.3 .

Avec la méthode ci-dessus, résoudre les équations suivantes :

1. $2x^2 + 9x - 5 = 0$
....
....
....
....
....
....
2. $-x^2 + 2x + 3 = 0$
....
....
....
....
....
....
3. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
....

....
....
....
....
....

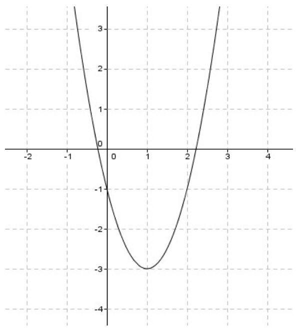
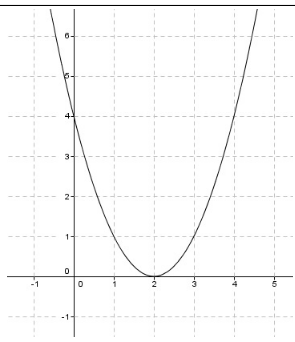
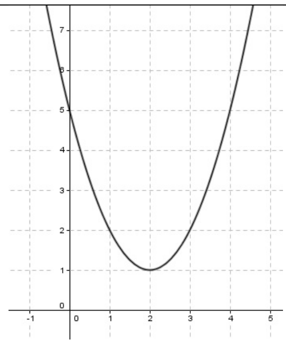
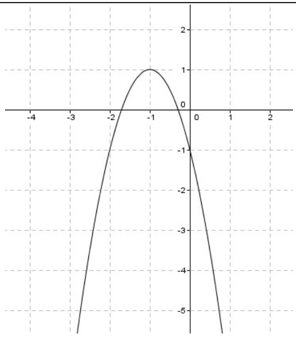
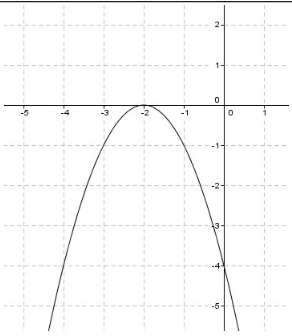
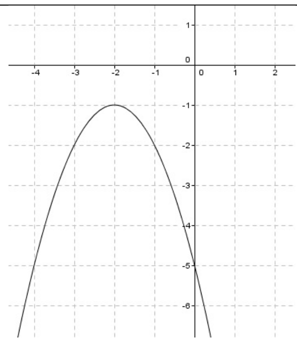
4. $18x^2 - 15x - 3 = 0$

....
....
....
....
....
....

5. $3x^2 + 5x + 7 = 0$

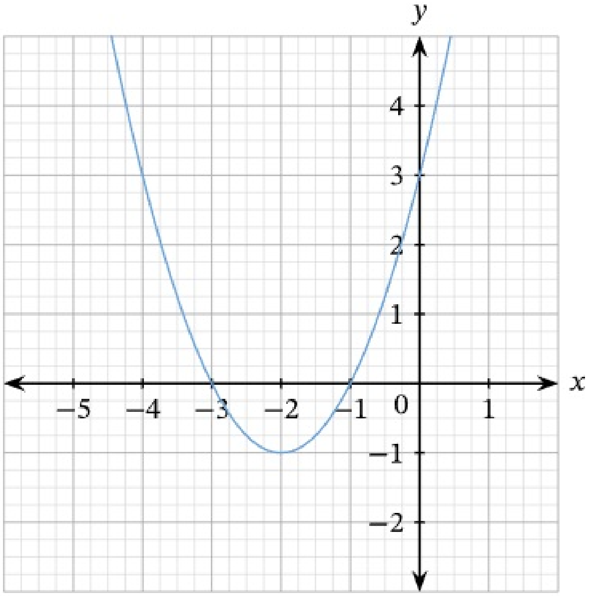
....
....
....
....
....
....

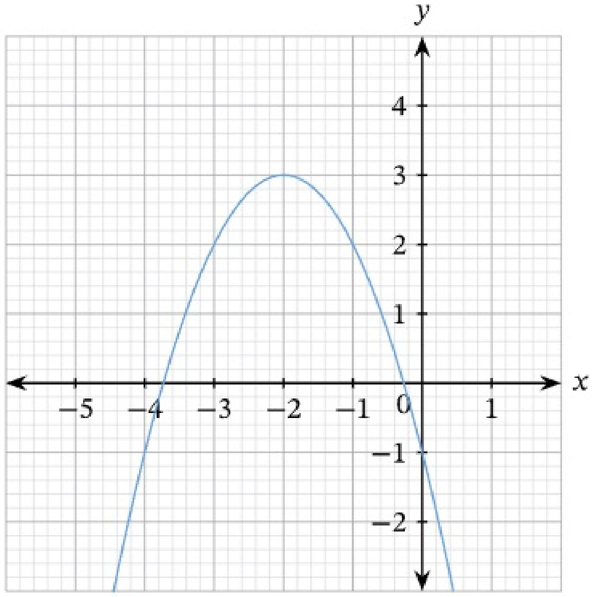
Graphiquement, les racines correspondent aux abscisses des points où la courbe coupe l'axe des abscisses (”le niveau de la mer”) :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Quand il y a deux racines, la courbe coupe l'axe deux fois, quand il y a une racine elle coupe une fois, et s'il n'y a pas de racine elle ne coupe pas du tout.
On peut lire les valeurs de x_1 et x_2 à l'endroit où la courbe coupe l'axe des abscisse.

Exercice 5.4 Résoudre graphiquement (en valeurs approchées) l'équation $f(x) = 0$ pour les deux fonctions représentées ci-dessous





1. Courbe de gauche :
   ....
   ....
   Pour cette fonction, de quel signe est a ? Pourquoi ? ....
2. Courbe de droite :
   ....
   ....
   Pour cette fonction, de quel signe est a ? Pourquoi ? ....

C. Signe du polynôme

Comme on le voit sur les graphiques précédents, le signe de la fonction f change à chaque racine. Selon qu'elle est en forme de "cuvette" ou de "colline", elle est "positive à l'extérieur des racines" ou "négative à l'extérieur des racines".

Propriété 5.1 La fonction polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est **du signe de a à l'extérieur des racines**.

Exercice 5.5 En reprenant les représentations graphiques de l'exercice précédent, dresser le tableau de signes des fonctions correspondantes :

1. Courbe de gauche :
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Courbe de droite :
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 5.6 .
En exploitant les résultats obtenus à l'exercice 3, dresser le tableau de signes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$

2. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

3. $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

4. $f(x) = 18x^2 - 15x - 3$

5. $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$

D. Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété 5.2 Si on connaît les racines x_1 et x_2 d'un polynôme du second degré, on peut le factoriser :

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{forme développée}} = \underbrace{a(x - x_1)(x - x_2)}_{\text{forme factorisée}}$$

Si x_1 et x_2 sont égales, on obtient une forme factorisée du type : $a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$

Exercice 5.7 En exploitant les résultats obtenus à l'exercice 3, factoriser les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$

2. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
....
....
....
....
....
....

3. $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$
....
....
....
....
....
....

4. $f(x) = 18x^2 - 15x - 3$
....
....
....
....
....
....

5. $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$
....
....
....
....
....
....

Exercice 5.8 L'empreinte carbone est un indicateur des émissions de gaz à effet de serre. On étudie les émissions de CO_2 de la France en s'intéressant à son empreinte carbone depuis 1995.
Ces émissions en fonction du temps sont données par : $f(x) = -0,8x^2 + 19,2x + 468$
x représente le temps, en années, écoulé depuis 1995. x est compris entre 0 et 39 (pour les années 1995 à 1995 + 39 = 2034).

1. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$ ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. je vais vous guider pour dresser le tableau de variation de f pour x compris entre 0 et 39.

   (a) Déterminer les coefficients $a =$ .... , $b =$ .... et $c =$ ....
   (b) Quel est le signe de a ? ....
   Quelle est la forme de la courbe ? Cuvette ou colline ? ....
   (c) La courbe représentative de f est une parabole, elle a donc un axe de symétrie vertical qui passe au "milieu" de ses deux racines. Calculer les racines x_1 et x_2 de f. ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

....
....
....
....
....

(d) Le "milieu" des deux racines x_1 et x_2 est la moyenne de ces deux valeurs. Calculer cette moyenne, on la notera m :

....
....
....
....
....

(e) m est donc l'abscisse du sommet (point le plus haut ou le plus bas de la courbe) de la parabole. Dresser le tableau de variations de f (vérifier par un tracé à la calculatrice que cela correspond bien à l'allure de la courbe) :

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. La France s'est engagée, d'ici 2030, à réduire ses émissions de gaz à effet de serre de 40% par rapport à leur niveau de 1995, qui était de 468.

(a) Calculer la quantité que représente 40% de 468.

....
....
....
....
....
....

(b) En regardant comment se comporte la fonction que nous avons étudiée, l'objectif de la France sera-t-il tenu en 2030 ?

....
....
....
....
....
....

2. Fonction polynôme du troisième degré

Définition 5.2 Une fonction **polynôme du troisième degré** est une fonction du type :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

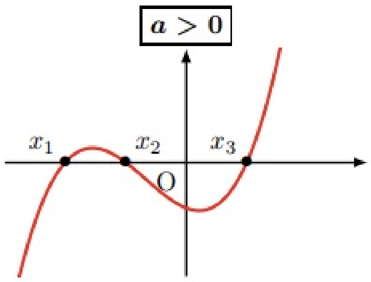
Le degré est la plus grande puissance de x qui apparaît dans l'expression de la fonction (ici c'est x^2, donc degré 3).
Le nombre qui multiplie cette plus grande puissance de x s'appelle le **coefficient dominant** (ici le coefficient dominant est a).

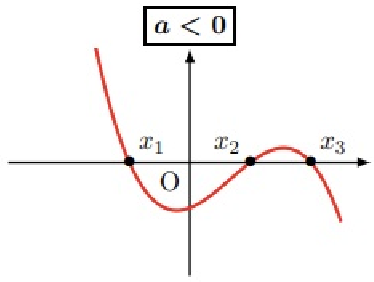
Exercice 5.9 Dire si les fonctions suivantes sont des polynômes du troisième degré, et si non, pourquoi.

1. $f(x) = -5x^2 + 3x - 2 + x^3$
   ....
   ....
   ....
2. $g(x) = 5x^3 + 4x^2 - 6x + \frac{1}{x} - 2$
   ....
   ....
   ....
3. $h(x) = (x+3)^3$
   ....
   ....
   ....
4. $k(x) = 4x^2 - 8x^3 + 2x - \sqrt{x} + 1$
   ....
   ....
   ....

A. Allure de la courbe, racines, forme factorisée.

La représentation graphique d'une fonction polynôme du troisième degré a l'allure ci-dessous.
Si a est positif, la courbe est "dirigée vers le haut". Si a est négatif, elle est "dirigée vers le bas".



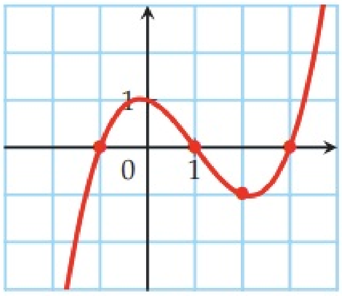


Il n'y a **pas vraiment de formule** pour trouver les racines d'un polynôme du troisième degré (enfin si, les formules de Cardan, mais elles sont horribles et utilisent les nombres complexes)...
On se contentera donc de lire les racines graphiquement, sur la courbe. Il y a au maximum 3 racines.
La forme factorisée, si on note les trois racines x_1, x_2 et x_3, sera :

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

.

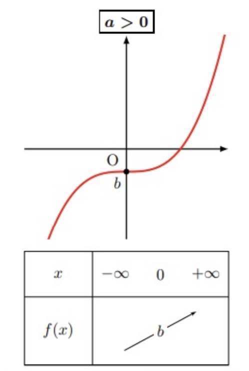
Exercice 5.10 On a représenté ci-dessous une fonction polynôme du troisième degré dont la forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.



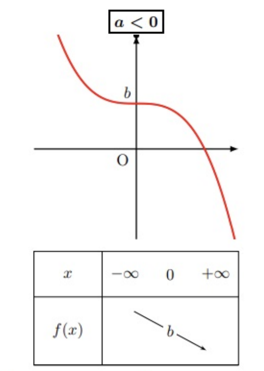
1. Déterminer par lecture graphique les valeurs de x_1, x_2 et x_3.
2. D'après l'allure de la courbe, quel est le signe de a ?
3. On peut lire sur le graphique que $f(2) = -1$. En déduire la valeur de a.
4. Donner la forme factorisée de f, et écrire $f(x)$ sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (forme développée).

B. Cas particulier des fonctions de la forme $ax^3 + b$.

L'allure de la courbe de ces fonctions est représentée ci-dessous.



La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.



La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ces fonctions sont strictement monotones (strictement croissante ou strictement décroissante), et on peut lire la valeur de b à l'endroit où la courbe coupe l'axe de ordonnées.

C. Exercice bilan.

Exercice 5.11 Une entreprise familiale fabrique des objets en bois. On suppose qu'elle vend tous les objets qu'elle fabrique. la fabrication peut varier entre 0 et 18 objets. On appelle x le nombre d'objets fabriques et vendus par l'entreprise. Le coût de fabrication en euros d'un nombre x d'objets, est donné par la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105,5x + 68$, dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f .

1. Étude des coûts de fabrication
   (a) Qu'est-ce qu'un coût fixe ? Quels sont les coûts fixes de l'entreprise ? (on peut lire cette valeur sur la courbe)
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   (b) Donner par lecture graphique le coût de fabrication de 6 objets
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   (c) Pour combien d'objets produits, le coût de fabrication est-il de 400 € ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Étude de la recette.
   Chaque objet fabriqué est vendu 50 €.
   (a) Donner l'expression de la fonction recette$g(x)$ (ce n'est pas la fonction tracée ci-dessus)
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   (b) Pourquoi la fonction recette est-elle une droite ? Tracer cette droite sur le graphique ci-dessus, dans la même figure que la fonction "coût de fabrication".
   ....
   ....
   ....
   ....
   (c) Comment doivent se situer les courbes de f et de g l'une par rapport à l'autre pour que l'entreprise fasse des bénéfices ? Déterminer graphiquement entre quelles valeurs de x l'entreprise réalise un bénéfice.
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Étude de la fonction $h(x) = g(x) - f(x)$.
   (a) Que représente cette fonction ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

(b) Calculer $g(x) - f(x)$ et donner une expression de $h(x)$. Quel est ce type de fonction ?

(c) Calculer $h(8)$, $h(-1)$ et $h(17)$. En déduire le forme factorisée de $h(x)$.

(d) Dresser le tableau de signes de $h(x)$ pour x compris entre 0 et 18.

(e) Pour combien d'objets fabriqués l'entreprise est-elle rentable ?